



TITLE:

円錐剪断層の作るフレーク模様 (オイラー方程式の数理解析: 力学と変分原理250年)

AUTHOR(S):

木田, 重雄; 後藤, 晋; 藤原, 昇平

CITATION:

木田, 重雄 ...[et al]. 円錐剪断層の作るフレーク模様 (オイラー方程式の数理解析: 力学と変分原理250年). 数理解析研究所講究録 2011, 1749: 137-141

ISSUE DATE:

2011-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171097>

RIGHT:

円錐剪断層の作るフレーク模様

同志社大学 理工 木田重雄 (Shigco KIDA)
岡山大学 自然科学 後藤 晋 (Susumu GOTO)
豊田自動織機 藤原昇平 (Shohei FUJIWARA)

アルミ粉などの扁平な微小粒子（フレーク）を多数流れに浮かべて光を照射し、それからの反射光の明暗から流れ構造を推定するのは、よく使われる流れの可視化法である。この場合、流れの構造に瞬時に応答するのは、フレークの位置と面の方向の時間変化率であることに注意しなければならない。すなわち、フレークの位置も面の方向のいずれもが流れの瞬時の構造を反映してはいないのである。本稿では、歳差回転球体内流のフレークによる可視化実験、ならびに対応する数値シミュレーションで観測されたフレーク面の明暗構造が、流れ場の局所構造ではなく、フレークが流れ場から受ける長時間にわたる積算効果によって形成されることを、円錐剪断層の漸近解を用いて示す。

1 歳差回転球内流れ

半径 a の球内に水を入れ、球の中心を通る軸のまわりに一定角速度 Ω_s で回転させる。さらに、この自転軸をそれに垂直な軸のまわりに別の一定角速度 Ω_p で回転させる。この歳差回転球内の流れの状態は、初期条件以外では、レイノルズ数 $Re = a^2 \Omega_s / \nu$ とポアンカレ数 $\Gamma = \Omega_p / \Omega_s$ の2つのパラメータの値のみによって決定される。ここに、 ν は水の動粘性係数である。特に、 $Re \gg 1$ かつ $\Gamma \ll 1$ の極限は、地球外核の熔融鉄の流れ ($Re > 10^{13}$ 、 $\Gamma = 10^{-7}$) のモデルとして多くの研究者の関心をひいてきた。

この極限における定常流の理論解析は古くからなされてきており、(i) 球面に沿って $O(Re^{-1/2})$ の厚さの境界層が現れること、(ii) 自転軸から $\pm\pi/3$ の角度をなす球面上の2つの円（臨界円という）のところで境界層近似が破綻し、厚さが $O(Re^{-2/5})$ で幅が $O(Re^{-1/5})$ の臨界領域ができること、さらに (iii) 臨界円を底面とし、自転軸の（臨界円から遠い側の）端点を頂点とする2つの円錐面上で、強い剪断流が生じることが知られていた [1-3]。この剪断層の内部構造は長年未知であったが、昨年やっとそれが明らかになった [4]。剪断層の厚さは $O(Re^{-1/5})$ で、流れは層に沿って流速は $O(\Gamma Re^{3/10})$ である。また、剪断層内部の速度分布は図1に示すような逆向きの流れの隣り合った二重層になっている。境界層を除く球内の大部分での流れはほぼ球面とともに動く剛体回転流である。弱い歳差運動 ($\Gamma \ll 1$) はこの剛体回転流に相対的に $O(\Gamma)$ の速度を誘導する（コリオリ効果）。この流れが境界層に侵入すると強い剪断力を受けて、 $O(\Gamma Re^{1/2})$ の球面に沿う流れが生成され、球内にこの大きさの剛体回転流（回転軸は自転軸から角度にして $O(\Gamma)$ だけずれている）が生ずる。これに上記の円錐剪断層の重ね合わさったのが流れの主要部である。

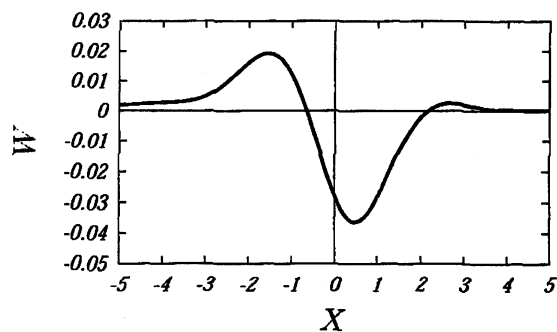


図1: 円錐剪断層の速度分布。W は速度、X は層を横切る座標で、それぞれ $\Gamma Re^{3/10}$ と $Re^{-1/5}$ で規格化してある。

2 フレーク模様の観測 — 実験

歳差回転球の自転軸を x 軸、歳差回転軸を z 軸、これらに垂直に y 軸をとる。球内は可視化のために多数の微小な扁平の粒子（フレーク）を浮かべた水で満たされている。フレークの大きさは約 $15\mu\text{m}$ 、厚さは 100nm 以下である。 y 軸の正方向と z 軸の正方向から (y, z) 面にレーザー光を照射し、それを x 軸の正方向から撮影する。 $Re = 80000$ 、 $\Gamma = 0.002$ の場合の写真を図 2(a) と (b) に示す。流れは定常である。

この 2 つの図を見比べるとフレークが明るく光っているところは、(i) どちらの方向から照射しても明るく細い同心円状と、(ii) 入射光の方向とともに向き（入射光から時計回りに 5° ほど傾いている）を変える扇形状の部分の 2 種類あることがわかる。このようなフレークの明暗模様は、球が 100 回程度自転した後には必ず現れる。明るい部分はレーザー光がフレークに反射してカメラのレンズに入ってくるから、(a) の場合は y 軸と x 軸の間の角の 2 等分線、(b) の場合は z 軸と x 軸の間の角の 2 等分線に垂直なフレーク面が存在することを意味する。ではフレーク面はなぜそのような配向するのか。その理由を解明することが本研究の目的である。

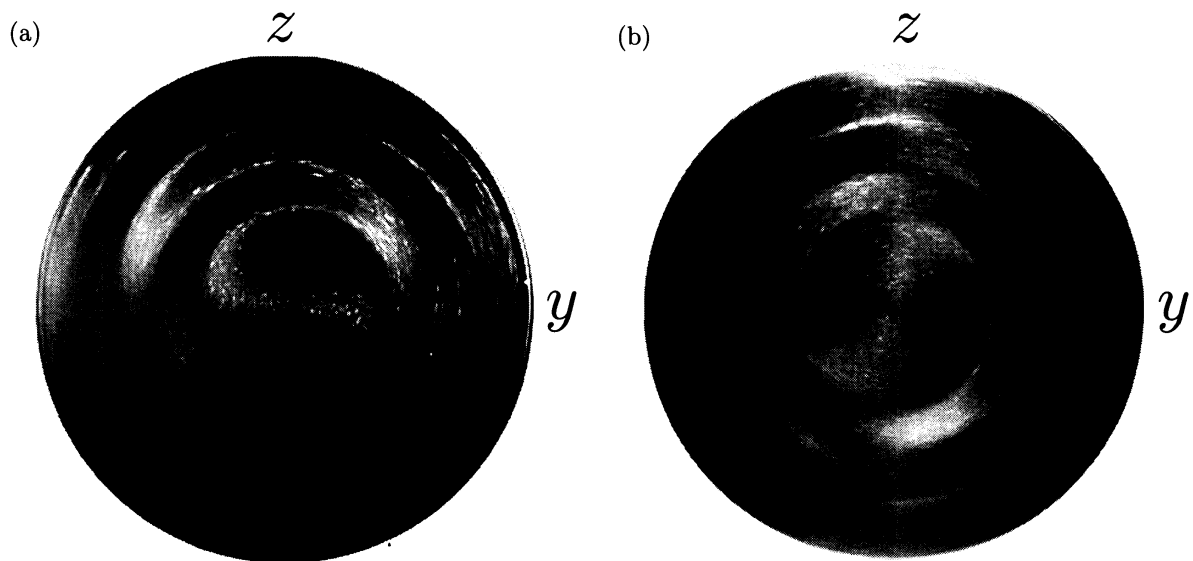


図 2: 実験で観測されたフレーク模様。(a) y 軸および (b) z 軸の正方向からレーザー光を照射。 $Re = 80000$ 、 $\Gamma = 0.002$ 。

3 フレーク模様の再現 — DNS

実験で観測されたフレーク模様を数値シミュレーションで再現する。フレークの形状はさまざまであるが、簡単のため微小な円板とみなして解析する。ある円板の重心の位置を $\mathbf{x}(t)$ 、円板面の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(t)$ とすると、これらの時間変化はそれぞれ、

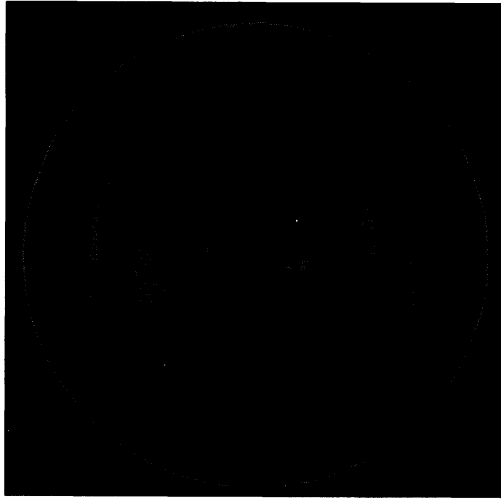
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \nabla)(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \quad (2)$$

と表される [5]。ここに、 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は定常な速度場で、あらかじめ数値計算で求めておく（数値計算の方法については [6] を参照）。

球内に円板をランダムに分布させ、100自転時間後の円板面の (y, z) 面上における方向分布をDNSで求める。図2(a)、(b)で明るいところに対応するフレーク面の法線ベクトルは、それぞれ y 軸と x 軸および z 軸と x 軸の2等分線上に向いていることを注意した。これらの方向にある法線ベクトルの個数を数え、その個数の大小に応じて明暗をつけたのが図3である。実験を極めてよく再現している。この結果は、フレークを微小な円板でモデル化したことの有効性を示すとともに、Jefferyの式(1)と(2)、および実験観測の正当性を支持するものである。

(a)



(b)

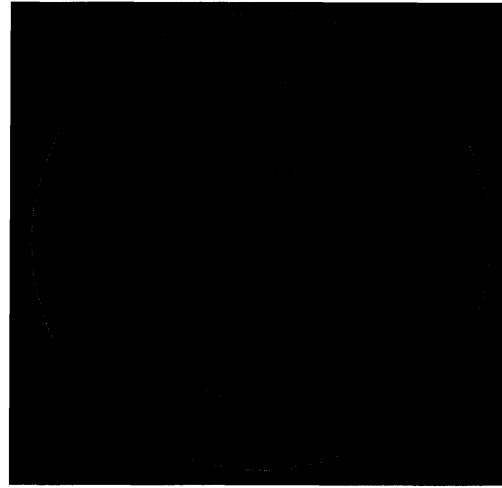


図3: 図2に対応する数値シミュレーションの結果。

4 フレーク面の方向分布 — 理論

先に述べたように、いま対象としている速度場は球の自転軸とは少し($O(\Gamma)$ の程度)角度の傾いた軸のまわりに回転する剛体回転流に、流速が $O(\Gamma Re^{3/10})$ の大きさで幅が $O(Re^{-3/10})$ の円錐剪断流が重なってできている。このような流れの中での微小円板の運動は、剛体回転流からの摂動展開によって解析することができる。歳差座標系 (x, y, z) に加えて、剛体回転流の回転軸を x' 軸とする直角座標系 (x', y', z') を導入する。ほとんどすべての円板は1自転時間ごとに (x', z') 面($y' > 0$)を通過し、そのたびごとに面の方向を $O(\Gamma Re^{1/2})$ だけ変える。他方、位置の変化の大きさは $O(\Gamma Re^{3/10})$ で、方向の変化に比べて高次の微小量となるので、以下の解析では無視する。そこで、この (x', z') 面($y' > 0$)における円板面の方向を (Θ', Φ') (剛体回転系 (x', y', z') の x' 軸を軸とする極座標の極角と方位角に対応する)とし、一周ごとの角変数の増分 $\Delta\Theta$ および $\Delta\Phi$ を円錐剪断層の誘導する速度[4]を用いて計算し、一周の時間 $2\pi/\Omega_s$ で割ることによって、面の方向角の時間発展方程式

$$\frac{\tilde{d}\Phi'}{dt} = [3S_+ \cot \Theta' - \sqrt{3}S_- \cos \Phi'] \sin \Phi', \quad (3a)$$

$$\frac{\tilde{d}\Theta'}{dt} = -S_+(1 + 2\cos^2 \Theta') \cos \Phi' + \sqrt{3}S_-(1 + \cos^2 \Phi') \sin \Theta' \cos \Theta' \quad (3b)$$

を得る。ただし、 \tilde{d}/\tilde{dt} は $2\pi/\Omega$ 、ごとの時間変化を表す。 $S_{\pm}(\rho, \varphi)$ は、円錐剪断層の速度分布 $W(X)$ (図 1 参照) の微係数を用いて、

$$K_{\pm}(\rho, \varphi) = \frac{4\Gamma R^{1/2} \int_0^{2\pi} W'(\frac{1}{2}R^{\frac{1}{2}}[\sqrt{3}\rho - 1 \mp \gamma\rho(\cos(\varphi + b) - \cos\varphi_1)]) \cos(\varphi_1) d\varphi_1}{3^{\frac{1}{2}}(\sqrt{3} + \rho)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

および、

$$S_{\pm}(\rho, \varphi) = K_{+}(\rho, \varphi) \pm K_{-}(\rho, \varphi), \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 ρ と φ は、歳差回転系の $x = 0$ 面における極座標 $y = \rho \cos \varphi$ 、 $z = \rho \sin \varphi$ ($0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) である。

さて、面の方向の確率密度関数を $P(\Theta', \Phi', t)$ とすると、式 (3a) と (3b) より、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} P(\Theta', \Phi', t) \\ &= \frac{1}{\sin \Theta'} \frac{\partial}{\partial \Theta'} \left[S_{+}(1 + 2 \cos^2 \Theta') \cos \Phi' \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{3} S_{-}(1 + \cos^2 \Phi') \cos \Theta' \sin \Theta' \right] \sin \Theta' P(\Theta', \Phi', t) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial \Phi'} (3S_{+} \cot \Theta' - \sqrt{3} S_{-} \cos \Phi') \sin \Phi' P(\Theta', \Phi', t) \\ & \quad + \sigma^2 \left[\frac{1}{\sin \Theta'} \frac{\partial}{\partial \Theta'} \sin \Theta' \frac{\partial}{\partial \Theta'} + \frac{1}{\sin^2 \Theta'} \frac{\partial^2}{\partial \Phi'^2} \right] P(\Theta', \Phi', t) \end{aligned} \quad (6)$$

で、最後の拡散項を除いた式が導かれる。最後の項は、式 (3a) と (3b) の右辺に等方的なランダム変動 (σ はその振幅) を加えることに相当する。これは、実際のフレークの形はさまざまで、円板としたモデルの面の変動に及ぼすその効果を表す。

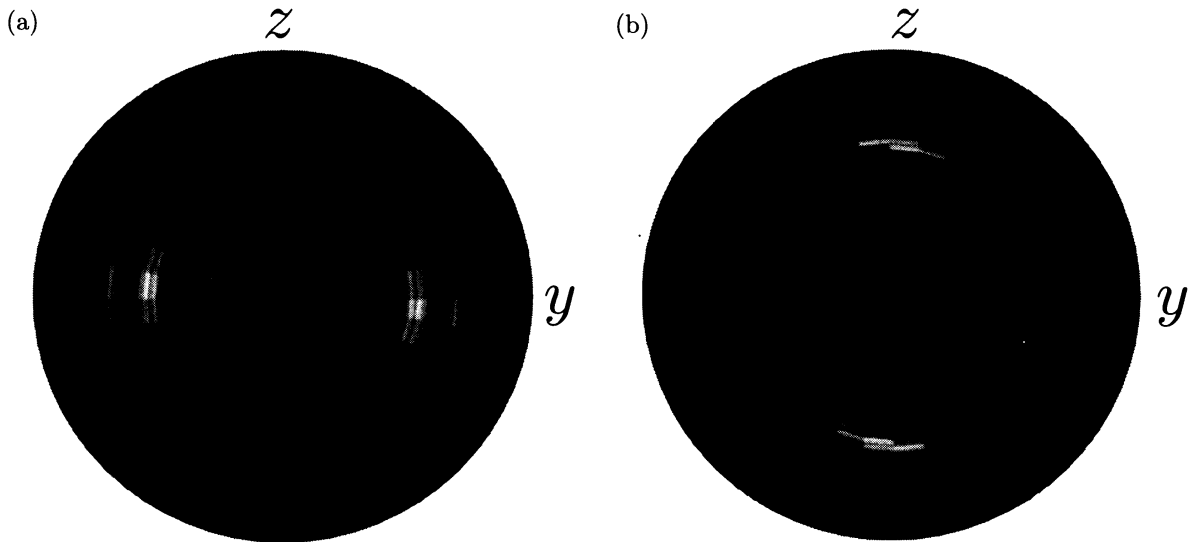


図 4: 方程式系 (3a) と (3b) の数値解より求めた円板の光る部分。(a) 右から照射した場合。(b) 上から照射した場合。

歳差回転系での円板面の方向 (Θ, Φ) (x 軸を軸とする極座標の極角と方位角に対応する) は $\Theta = \Theta'$ 、 $\Phi = \Phi' + \varphi$ と表される。したがって、 y 軸の正方向から照射したときに明るくなるフレークの面は $(\Theta = \frac{1}{4}\pi, \Phi = 0$ として) $\Theta' = \frac{1}{4}\pi$ 、 $\Phi' = -\varphi$ で、 z 軸の正方向から照射したときに明るくなるフレークの面は $\Theta' = \frac{1}{4}\pi$ 、 $\Phi' = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ である。

式 (3a) と (3b) を数值的に解いて、(a) y 軸の正方向から照射した場合と (b) z 軸の正方向から照射した場合に、それぞれ明るくなる角度での確率密度関数の大きさの分布を図 4(a, b) に示す。空間解像度は、動径方向に 100、方位角方向に 32 とし、 $\sigma = 1$ とした。同心円状に明るく光る部分は線状でなく帯状に現れている。また扇形に光る部分については、位置は観測と対応しているが、形は再現していない。この不一致は、計算の解像度が足りないことが原因であるように思われる。

5 結論

歳差回転球内の定常流で観測されたフレークの明暗模様は、フレークが円錐剪断層の速度勾配の積算効果を受けて形成されたものであり、観測される面内の流れ構造に対応するものではない。

参考文献

- [1] Bondi, H. and Lyttleton, R.A. On the dynamical theory of the rotation of the Earth. II. The effect of precession on the motion of the liquid core. Proc. Camb. Phil. Soc. **49** (1953) 498-515.
- [2] Roberts, P.H. and Stewartson, K. On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity. Astrophys. J. **137** (1963) 777-790.
- [3] Busse, F.H. Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell, J. Fluid Mech. **33** (1968) 739-751.
- [4] 木田重雄：歳差回転球内流れの高レイノルズ数・低ポアンカレ数極限、京都大学数理解析研究所講究録 1697 (2010 年 7 月) 148-166.
- [5] Jeffery, G.B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid, Proc. R. Soc. Lond. A **102** (1922) 161-179.
- [6] Kida, S. and Nakayama, K. Helical flow structure in a precessing sphere. J. Phys. Soc. Japan **77** (2008) 054401.